Теоретический тур
Решения задач

Приведенные баллы и схема оценивания – приблизительные, жюри может их менять по своему усмотрению. В случае возникновения вопросов по задачам обращайтесь по телефону +375 29 257 08 09.

1. **(5 баллов)** Сразу оговоримся, что склонение этих звезд никак не повлияет на ответ задачи. Высота в верхней или нижней кульминации тут нам неинтересна, так как на экваторе все звезды являются восходящими и заходящими. Главное, чтобы звезда просто находилась над горизонтом.

Кроме того, на экваторе в течение звездных суток над горизонтом успевают побывать абсолютно все звезды. Поэтому получается, что, к примеру, мы сейчас видим 50% небесной сферы, а через половину звездных суток – другие 50% сферы. И если звезды не расположены на противоположных кругах склонения, то обе непременно попадут в одно полушарие (по прямому восхождению) и в некоторый момент времени окажутся одновременно над горизонтом.

В чем тогда может быть проблема, если задача настолько тривиальная? Солнце! Если нахождение обеих звезд над горизонтом совпадет со светлым временем суток, то мы их никак не увидим.

Задачу можно решить и графически, и примерными числовыми оценками, и довольно точно, используя звездное время. Правильные ответы, полученные любым корректным способом, можно оценить максимальным баллом.

Раз это день весеннего равноденствия, то $\alpha_{\odot} = 0^h$. Разность прямых восхождений звезд составляет примерно либо 14^h, либо 10^h (в зависимости от того, что от чего отнимать). Второй вариант нас как раз и интересует, так как он меньше 12 часов. Т. е. сначала должна взойти первая звезда, а спустя 10 часов – вторая (имеется в виду звездное время). И получается, что около 2 часов обе они будут находиться на небе одновременно, пока первая не зайдет. Но Солнце в указанный день имеет прямое восхождение 0^h - получается, что после восхода первой звезды уже через два часа станет светло. И стемнеет только через два часа после того, как первая звезда скроется под горизонтом. Поэтому ответ: **нет, не сможет увидеть**.

Для тех, кто знает, что такое время и знаком с формулой $s = \alpha + t$, можно посчитать точнее. Первая звезда будет над горизонтом с 16^h13^m до 04^h13^m звездного времени, а вторая – с 02^h09^m до 14^h09^m. Значит, одновременно они будут над горизонтом с 02^h09^m до 04^h13^m. А Солнце в день весеннего равноденствия будет над горизонтом с 18^h00^m до 06^h00^m (пренебрежем движением Солнца на фоне звезд), что целиком включает в себя рассчитанный интервал. Значит, астроном невооруженным глазом увидеть звезды одновременно **не сможет**.

Ремарка про невооруженный глаз сделана не зря. Существуют свидетельства, что самые яркие звезды днем в телескоп все же видны (на большом увеличении). Кроме того, их можно сфотографировать через телескоп в ближнем инфракрасном диапазоне или даже зафиксировать в радиодиапазоне.

2. **(5 баллов)** Представим себе наблюдателя, стоящего на некотором меридиане Земли. И допустим, что над этим же меридианом сейчас находится Луна. То есть, для наблюдателя сейчас Луна в верхней кульминации. Земная поверхность и Луна обращаются вокруг центра Земли в одном направлении. Когда человек и Луна снова встретятся на одном меридиане?

Задача выглядит аналогично задачам о синодическом периоде двух планет, обращающихся в одном направлении. Поэтому продолжительность “лунных суток” $S_Л$ найдем по аналогичной формуле:

$$\frac{1}{S_Л} = \frac{1}{T_\oplus} - \frac{1}{T_Л}$$

$$\frac{1}{S_{Л}} = \frac{1}{23^h56^m} - \frac{1}{27.32^d}$$

$$S_{Л} = 24^h50^m$$

Поскольку Луна в реальности движется не по небесному экватору, да и орбита у нее слегка эллиптическая, то реальное время между кульминациями Луны может быть как немного меньше, так и больше полученного значения (ситуация аналогична уравнению времени для Солнца). Однако именно этот средний период закладывается в “лунный” режим экваториальных монтировок.

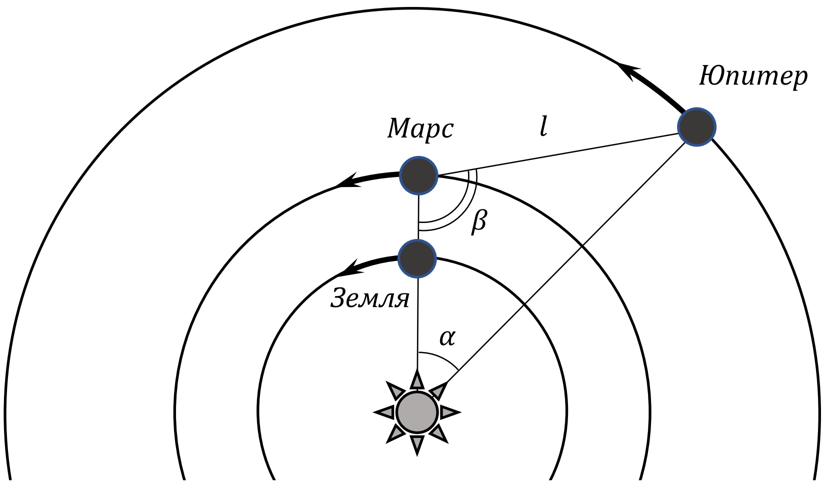
*Если участник вместо периода осевого вращения Земли (23^h56^m) взял средние солнечные сутки (24^h), то отметка снижается на **2 балла**.*

3. **(6 баллов)** Нарисуем, к примеру, взаимное расположение трех планет на 8 декабря (вид с северного полюса эклиптики). Марс будет в противостоянии, а Юпитер “отстанет” на некоторый угол α. Вычислим этот угол. С момента противостояния Юпитера прошло 43 дня, а синодический период Юпитера составляет

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T}$$

$$S = 1.092 \text{ года} = 399^d$$

Тогда из пропорции получаем: $\alpha = 43^d/399^d \cdot 360° = 38.8°$. Изобразим соответствующие положения на рисунке:



Оценим теперь конфигурацию Юпитера относительно Марса на 8 декабря. Для этого найдем угол β. Вычислить его легко из теоремы косинусов, однако мы не знаем радиусов орбит Марса и Юпитера. Определим эти радиусы из 3-го закона Кеплера:

$$a_{М} = \sqrt[3]{T_M^2} = \sqrt[3]{1.88^2} = 1.52 \text{ а. е.}$$

$$a_{Ю} = \sqrt[3]{T_{Ю}^2} = \sqrt[3]{11.86^2} = 5.20 \text{ а. е.}$$

Найдем расстояние между Марсом и Юпитером:

$$l = \sqrt{a_{М}^2 + a_{Ю}^2 - 2a_{М}a_{Ю}\cos\alpha} = 4.13 \text{ а. е.}$$

Теперь можно определить и угол β:

$$\beta = \arccos\left(\frac{a_\text{М}^2 + l^2 - a_\text{Ю}^2}{2a_\text{М}^2 l}\right) = 128°$$

Вот здесь затаился очень важный момент. Как правило, многие любят определять угол β, используя теорему синусов – ведь это гораздо проще. Но, выражая β из-под синуса, следует не забывать, что в интересующем нас диапазоне уравнение вида $\sin\beta = a$ имеет два корня: $\beta = \arcsin x$ и $\beta = \pi - \arcsin x$. И какой из этих корней нам брать – совершенно неясно, а ведь от этого зависит ход дальнейшего решения. Поэтому мы используем именно теорему косинусов.

Итак, угол β тупой, но со временем он будет уменьшаться, ведь Марс имеет бо́льшую угловую скорость и будет "убегать" вперед. Когда значение β достигнет 90°, наступит квадратура. Очевидно, что **она будет восточной** – если посмотреть с Марса на Солнце, то Юпитер для наблюдателя будет слева от светила. Определим теперь значение угла $\alpha_\text{кв}$ на момент квадратуры. Поскольку треугольник "Солнце – Марс – Юпитер" будет прямоугольным, то

$$\alpha_\text{кв} = \arccos\frac{a_\text{М}}{a_\text{Ю}} = 73.0°$$

Таким образом, чтобы наступила квадратура угол α должен увеличиться с первоначальных 38.8° до 73.0°, $\Delta\alpha = 34.2°$. Вычислим, за какое время произойдет это изменение:

$$t = \frac{\Delta\alpha}{\omega_\text{М} - \omega_\text{Ю}} = \frac{\Delta\alpha}{360°/T_M - 360°/T_\text{Ю}} = 0.212 \text{ года} = 77.5^d$$

Если отсчитать дату от 8 декабря, то получится, что восточная квадратура Юпитера для наблюдателя с Марса наступит **23-24 февраля 2023 года** по земному календарю. *Ошибка в ответе в пределах* $\pm 2^d$ *вполне допускается и засчитывается за правильный ответ.*

4. (6 баллов)

Для того, чтобы двигаться по круговой орбите, необходимо, чтобы вектор скорости был перпендикулярен радиус-вектору, проведенному из центра Луны. А в периселении эти вектора как раз перпендикулярны, поэтому при коррекции орбиты изменять направление скорости не придется, а высота круговой орбиты будет равна высоте периселения. Рассчитаем первоначальную скорость в периселении и круговую скорость на новой орбите:

$$v_\text{п} = \sqrt{GM_\text{Л}\left(\frac{2}{r_\text{п}} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{GM_\text{Л}\left(\frac{2}{R_\text{Л} + h_\text{п}} - \frac{2}{2R_\text{Л} + h_\text{п} + h_a}\right)} = 1669 \text{ м/с}$$

$$v_\text{кр} = \sqrt{\frac{GM_\text{Л}}{R_\text{Л} + h_\text{п}}} = 1628 \text{ м/с}$$

Поскольку движение во время коррекции орбиты было равнозамедленным, то рассчитаем ускорение:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_\text{кр} - v_\text{п}}{9^s} = \mathbf{-4.6 \text{ м/с}^2}$$

Получается вполне себе ощутимое ускорение, составляющее примерно половину g для земной поверхности. *Если участник олимпиады не поставил знак минус, предлагается не снижать отметку, ведь практический интерес представляет именно модуль этого значения.*

5. (12 баллов, по 3 за каждый пункт)

а) Определим, какую энергию собирает телескоп за время t. Мы знаем, сколько солнечного света приходит за секунду на каждый квадратный метр (солнечная постоянная), поэтому необходимо домножить это значение на площадь объектива телескопа и на время накопления света:

$$Q = E_{\odot}\frac{\pi D^2}{4}t$$

Одновременно эта величина должна быть равна количеству тепла, необходимому для нагревания воды:

$$Q = cm\Delta T$$

Приравняем:

$$E_{\odot}\frac{\pi D^2}{4}t = cm\Delta T$$

$$t = \frac{4cm\Delta T}{E_{\odot}\pi D^2} = 4200^s \approx \mathbf{1^h 10^m}$$

Очевидно, что даже в идеальных условиях, описанных в задаче, учитель не успеет закипятить воду за перемену.

б) Оценка времени закипания с учетом теплового излучения кружки – дело неблагодарное: температура будет изменяться нелинейно, ведь с ее ростом будет возрастать и излучение. Поэтому подобное решение непременно приведет к дифференциальному уравнению, что вряд ли приемлемо на районной олимпиаде по астрономии. Поэтому есть подозрение, что в этой задаче что-то не так, и мы до высшей математики попросту не успеем дойти.

Вычислим количество энергии, попадающей в телескоп (и поглощаемой кружкой) за секунду:

$$\left(\frac{\Delta E}{\Delta t}\right)_{\text{погл}} = E_{\odot}\frac{\pi D^2}{4} = 24\ \text{Вт}$$

Оценим, какое количество энергии будет излучать кружка при температуре, например, 100°C. Зная объем кружки, определим длину ее грани (напомним, что кружка у нас кубическая): $l = \sqrt[3]{V} = 0.067\ \text{м}$. Тогда мощность излучения составит

$$\left(\frac{\Delta E}{\Delta t}\right)_{\text{изл}} = S\cdot\sigma T^4 = 6l^2\sigma T^4 = 30\ \text{Вт}$$

Как видим, при максимальной температуре потери тепла превысят темп поглощения энергии – следовательно, эту температуру невозможно будет достичь. Следовательно, в таком случае **учитель никогда не закипятит себе чай, используя данный телескоп**.

в) В состоянии термодинамического равновесия температуру изображения Солнца на экране можно определить, приравняв количество поглощаемой и излучаемой энергии:

$$E_{\odot}\frac{\pi D^2}{4} = S\cdot\sigma T^4$$

Здесь S – это площадь изображения Солнца. Чтобы ее найти, необходимо оценить радиус этого кружка. Поскольку при наблюдении из центра объектива угловые размеры Солнца и изображения равны, радиус светового кружка составит $F\,\mathrm{tg}\,\rho_{\odot} \approx F\rho_{\odot}$ ($\rho_{\odot}$ выражается в радианах). Тогда

$$E_{\odot}\frac{\pi D^2}{4} = \pi\left(F\rho_{\odot}\right)^2\cdot\sigma T^4$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{E_\odot}{4\sigma\rho_\odot^2}\left(\frac{D}{F}\right)^2} = \mathbf{1800\ K}$$

г) Преобразуем формулу из предыдущего пункта. Солнечную постоянную можно выразить через светимость Солнца и среднее расстояние Земли до Солнца:

$$E_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2}$$

А светимость Солнца можно получить через его площадь и температуру:

$$L_\odot = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4$$

Подставим все это в формулу для определения температуры черного экрана:

$$T = \sqrt[4]{\frac{E_\odot}{4\sigma\rho_\odot^2}\left(\frac{D}{F}\right)^2} = \sqrt[4]{\frac{R_\odot^2 T_\odot^4}{4a_\oplus^2\rho_\odot^2}\left(\frac{D}{F}\right)^2}$$

Теперь можно заметить, что $R_\odot/a_\oplus = \sin\rho_\odot \approx \rho_\odot$. Тогда угловой радиус Солнца в формуле сокращается и мы получаем

$$T = T_\odot\sqrt[4]{\frac{1}{4}\left(\frac{D}{F}\right)^2}$$

Как видим, температура на экране будет зависеть только от соотношения D/F (его еще называют относительным отверстием объектива). А при значениях $D/F > 2$ получается, что температура на экране даже превысит температуру Солнца!

Однако представить себе объектив с таким относительным отверстием очень трудно. И даже если его и удастся создать (к примеру, короткофокусное параболическое зеркало), то данное решение будет все равно неприменимо, так как сильно выйдет за рамки используемых в школьной оптике тонких линз/зеркал и линейных приближений. Поэтому вполне справедливо будет утверждать, что невозможно добиться в фокусе объектива температуру, превышающую температуру излучающего тела.

Этим фактом, кстати, в свое время воспользвался известный ученый, уроженец Беларуси, Витольд Цераский в своих попытках измерить температуру Солнца. Однако хотя метод, применяемый им, и был по сути верным, его реализация была слишком наивной, без использования закона Стефана-Больцмана, который к тому времени уже был известен. Цераский тогда получил, что Солнце как минимум горячее 3500 К.

Всего 34 балла за теоретический тур